Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 146 - 151
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

PENGEMBANGAN TEOREMA *KOSNITA* DENGAN MENGGUNAKAN *ORTHOCENTER*

Ali Subroto[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3], Hasriati[4]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2,3,4]Universitas Riau
e-mail: alisubroto4693@gmail.com

Abstract

Theorem kosnita generally constructed with circumcenter, stating that The lines joining the vertices A, B, and C of a given triangle ABC with the circumcenters of the triangles BCO, CAO, and ABO (O is the circumcenter of triangle ABC), respectively, are concurrent. Additionally, kosnita can also be developed by modifying the circumcenter of triangle ABC with the centroid BCO, CAO and ABO, each also concurrent. In the process of proving it, will use the concept of Ceva theorem, sine rule and another simple concept, so it can be easily understood for middle schools.

Keywords: Kosnita, Circumcenter, Orthocenter, concuren

Abstrak

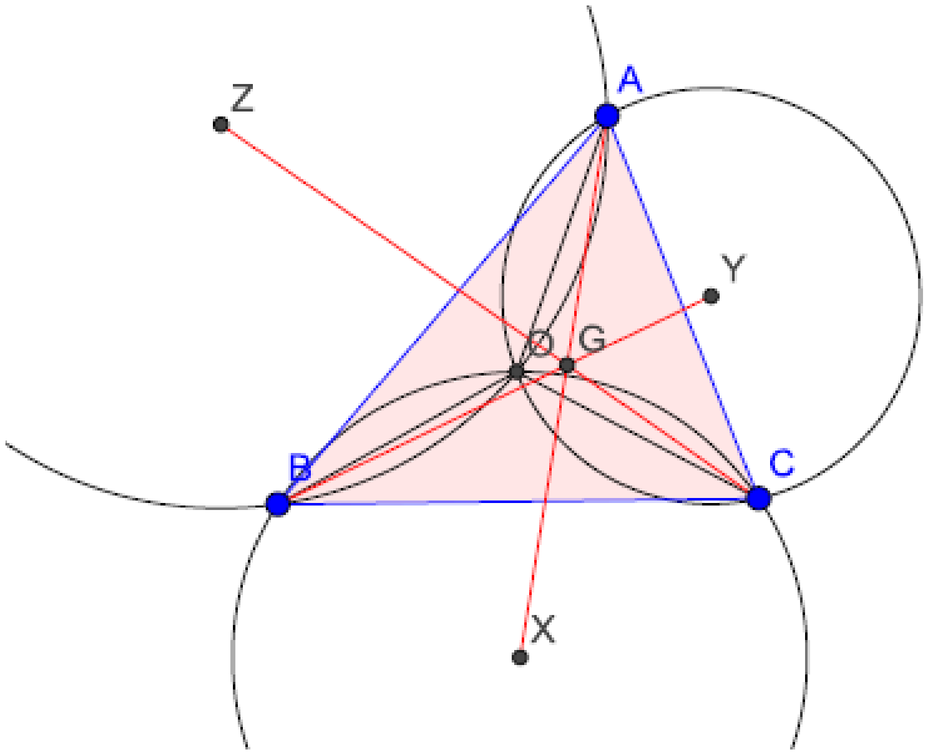
Teorema kosnita pada umumnya dikontruksi dengan circumcenter, yang menyatakan bahwa garis yang dihubungkan dari sudut segitiga *ABC* dengan *circumcenter* segitiga *BCO*, *CAO* dan *ABO* (O *circumcenter* segitiga ABC) masing-masing adalah konkuren. Selain itu, kosnita dapat juga dikembangkan dengan memodifikasi dari *Orthocenter* segitiga *ABC* dengan *circumcenter BCO*, *CAO* dan *ABO* yang masing-masing juga konkuren. Dalam proses pembuktiannya akan menggunakan konsep kesebangunan dengan aturan sinus dan konsep lain yang sederhana, sehingga dapat dengan mudah dipahami untuk siswa tingkat sekolah menengah.

Kata kunci: *Kosnita, Circumcenter, Orthocenter, Konkuren*

Pada sebarang segitiga terdapat bermacam-macam garis istimewa, seperti garis bagi sudut, garis berat, garis tinggi dan Garis sumbu (Mashadi, 2015[a]); Mashadi, 2015[b]; Rawuh, 1993). Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus (Mashadi, 2015[a]); Mashadi, 2015[b]; Mashadi. (2016[c]). Rawuh, 1993). Titik potong ketiga garis sumbu dalam sebuah segitiga inilah yang disebut dengan *circumcenter*. *Circumcenter* juga merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga (Mashadi, 2015[a]).

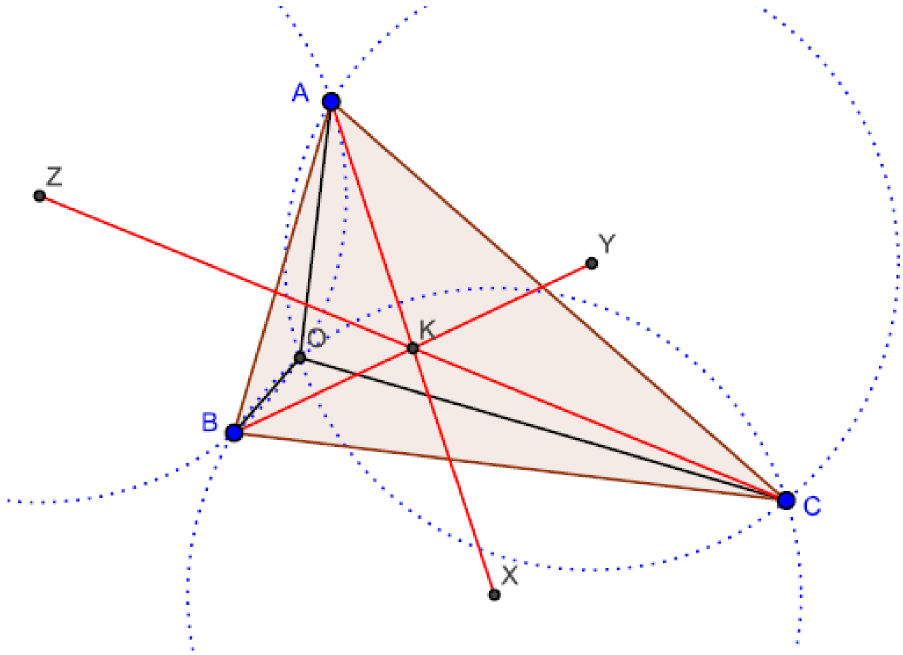
Di bidang geometri salah satu teorema yang membahas tentang segitiga yaitu Teorema Kosnita (Villiers, 1996[b]). Teorema ini dikontruksi dengan menggunakan titik *circumcenter* yaitu jika diberikan segitiga *ABC* dengan *circumcenter* O, dan *X*, *Y*, *Z circumcenter BOC*, *COA*, *AOB*. Maka garis perpotongan *AX*, *BY*, *CZ* kongkuren di satu titik (Villiers, 1995[a]; Villiers, 1996[b]). *Cezar Cosnita* (1910-1962) adalah matematikawan asal Rumania yang telah menemukan teorema tersebut tepatnya pada tahun 1941 (Patrascu, 2010; Rigby, 1997). Selanjutnya, Pada tahun 1995 Teorema Kosnita dibuktikan oleh Michael de Villiers yaitu matematikawan dari Universitas Durban-Westville di Afrika selatan (Villiers, 1995[a]; Villiers, 1996[b]). Kontruksi Teorema ini seperti pada Gambar 1.

Bukti dari teorema kosnita dibuat oleh Michael de Villiers. Dasar pembuktiannya adalah menggunakan Generalisasi Fermat-Terriceli (Villiers, 1995[a]; Villiers, 1996[b]). Ternyata, teorema ini bisa dikem-bangkan menggunakan titik potong garis-garis istimewa yang lain pada segitiga. Teorema kosnita yang ada



Gambar 1. Kontruksi Teorema *Kosnita*

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 146 - 151
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 2. *O Orthocenter* Segitiga *ABC, X, Y, Z Circumcenter* segitiga *BOC, COA, AOB*

dapat dikontruksi dengan memodifikasi *O Orthocenter* segitiga *ABC* dan pada segitiga *BOC*, *COA*, *AOB* dengan *X*, *Y*, *Z* menggunakan titik *circumcenter*, seperti pada Gambar 2. Kemudian akan ditentukan apakah perpotongangan garis *AX*, *BY* dan *CZ* akan konkuren di satu titik.

Berdasarkan uraian tersebut, pada makalah ini akan membuktikan Pengembangan Teorema Kosnita dengan menggunakan *Circumcenter* dan *Orthocenter*. Pembuktian akan dilakukan dengan pendekatan yang mudah dipahami oleh siswa SMA yaitu dengan konsep kesebangunan. Sebelum dibutikan secara aljabar, kontruksi dari gambar dibuat dengan bantuan aplikasi *Geogebra*.

Pada sebarang segitiga *ABC*, banyak kesamaan dan ketidaksamaa yang dapat dibentuk, juga dari masing-masing titik sudut segitiga *ABC* dapat dibentuk garis tinggi, garis bagi dan garis berat (Mashadi, 2015[a]); Mashadi, 2015[b]; Mashadi, 2016[c]; Herlinawati, 2015). Selain itu dari titik tengah masing-masing sisi juga dapat dibentuk garis yang tegak dengan masing-masing sisi tersebut (Mashadi, 2016[c]; Zukrianto, 2016).

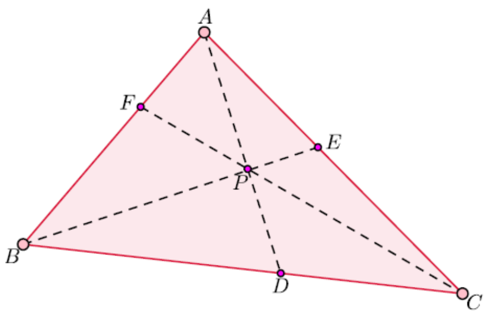
Lingkaran Luar Segitiga. Lingkaran luar suatu segitiga adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga dan titik pusat dari lingkaran luar segitiga tersebut adalah *circumcenter* (Mashadi, 2015[a], Mashadi. (2016[c]). Pada sebarang segitiga ABC didefinisikan

a. ***Centroid*** adalah titik potong ketigagaris berat yang berpotongan pada suatu titik.
b. ***Orthocenter*** adalah titik potong ketiga garis tinggi yang berpotongan pada satu titik.

c. ***Incenter*** (titik pusat lingkaran luar) adalah titik potong ketiga garis bagi ketiga sudut yang berpo-tongan pada satu titik.
d. ***Circumcenter*** (Titik pusat lingkaran luar) adalah titik potong ketiga garis yang melalui median dan tegak lurus dengan masing-masing sisi.

Teorema Ceva. Di dalam suatu segitiga, banyak terdapat konkuren garis-garis lurus. Teorema ceva merupakan cara terbaik untuk menunjukan eksistensi kekokurenan (berpotongan di satu titik) dari beberapa buah garis lurus (Wardiyah, 2016, Mashadi 2015[a], Mashadi, 2015[b]). Bukti teorema ceva cukup banyak (Mashadi 2015[a], Mashadi, 2015[b]), beberapa pembuktian digunakan dengan konsep luas atau menggukana konsep trigonometri. Ilustrasi dari Teorema Ceva seperti Gambar 5, Jika *D*, *E* dan *F* masing-masing adalah titik pada sisi *BC*, *CA* dan *AB* pada Δ*ABC*. Maka garis *AD*, *BE* dan *CF* adalah kongkuren (bertemu di satu titik) jika dan hanya jika

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Gambar 3. Ilustrasi Teorema CEVA

METODE

Teorema Kosnita dikontruksi pada segitiga sembarang yang ditentukan titik *circumcenter*-nya, misakan di titik O. Dari titik *O circumcenter*, dibuat segitiga *AOB*, *BOC* dan *COA*. Selanjutnya, Z, X, Y adalah titik *Circumcenter* masing-masing segitiga *AOB*, *BOC* dan *COA*. Perpotongan garis *AX*, *BY* dan *CZ* adalah titik kosnitanya (Grinberg, 2003; Villiers, 1995[a]; Villiers, 1996[b]).

Peneliti akan mengembangkan Teorema Kosnita dengan memo-difikasi dengan titik *circumcenter* dan *Orthocenter*. Untuk kontruksi awal, sebagai pembantu kontruksi gambar, digunakan aplikasi geogebra. Adapun langkah-langkah metode penelitiannya sebagai berikut:

1. Modifikasi kosnita yang akan dibuat adalah kombinasi titik *Orthocenter O* pada segitiga *ABC* dengan titik *Circumcenter* pada segitiga *ABO*, *BCO* dan *ACO*. Hubungkan segmen garis dari titik *O* ke masing-masing Sudut Segitiga. Dari segitiga *ABO*, *BCO* dan *ACO* ditentukan masing-masing titik *Circumcenter* yaitu *Z*, *X* dan *Y*. Hubungkan titik *A* ke *X*, *B* ke *Y* dan *C* ke *Z*, lalu tentukan apakah perpotongan segmen garis *AX*, *BY* dan *CZ* berpotongan di satu titik.
2. Pada segitiga *ABO*, *BCO* dan *ACO* dibuktikan terlebih dahulu apakah jari-jari dari masing-masing lingkaran luarnya sama panjang. Jika terbukti sama panjang maka akan terbentuk segienam *AZBXCY* yang memiliki sisi sama panjang.

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 146 - 151
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

3. Pembuktian Kekonkurenan di satu titik pada pengembangan teorema kosnita ini juga dapat digunakan Teorema ceva.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam pengembangan teorema kosnita ini, pembahasan di fokuskan pada titik *O* segitiga *ABC*, dengan *O* adalah titik *Circumcenter* dan *Orthocenter*.

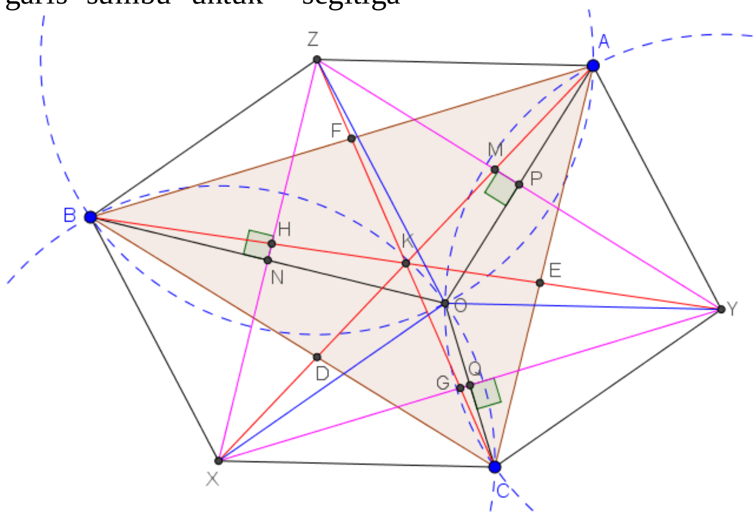
Teorema (Teorema Kosnita *Orthocenter-Circumcenter*). Jika diberikan segitiga *ABC* dengan *O Orthocenter*, *dan X, Y, Z Circumcenter* segitiga *BOC*, *COA*, *AOB* maka garis perpotongan *AX*, *BY*, *CZ* kongkuren di satu titik.

Bukti: Diketahui *O* Orthocenter ΔABC, *X*, *Y* dan *Z* Circumcenter segitiga *BOC*, *AOC* dan *AOB*. Hubungkan titik *X*, *Y* dan *Z* sehingga terbentuk segitiga *XYZ*, tarik garis *ZA*, *ZB*, *YA*, *YC*, *XB* dan *XC*. Akan ditunjukkan garis *AX*, *BY* dan *CZ* konkuren di satu titik.

Pada Gambar 4, *O* adalah *Orthocenter* segitiga *ABC*, *NZ dan PZ* adalah garis sumbu untuk segitiga *AOB*, dimana *Z* circumcenter segitiga *AOB*. *NX* dan *QX* adalah garis sumbu untuk segitiga *BOC*, dimana *X* circumcenter segitiga *BOC*. Perhatikan segiempat *BZOX*. Segitiga *BNZ* sebangun dengan segitiga *XNO*, *ZB* = *ZO* (jari-jari lingkaran luar segitiga *AOB*), *XB* = *XO* (jari-jari lingkaran luar segitiga *BOC*), *ZX* tegak lurus *BO*. Karena Segitiga *BNZ* sebangun dengan segitiga *XNO* diperoleh *ZN* = *NZ* dan *BN* = *NO*, $\angle BZN = \angle OXN$ sehingga diperoleh bahwa panjang *BZ* = *OX*.

Dengan cara yang sama, diperoleh panjang *AZ* = *YO*. Karena panjang *BZ* = *OX* dan *AZ* = *YO* maka Panjang *BX* = *AY* dan *AZ* = *CX*. Sehingga dapat disimpulkan *BZ* = *BX* = *AZ* = *AY* = *CX* = *CY*. Pembuktian panjang jari-jari ini juga telah dibuktikan oleh Mackenzie (1992).

Karena *BZ* = *BX* = *AZ* = *AY* = *CX* = *CY* maka *AZBXCY* adalah segi enam dengan panjang sisi-sisinya sama. *AX*, *BY* dan *CZ* adalah diagonal segienam *AZBXCY*, dengan diagonal-diagonal akan berpotongan di satu titik, maka *AX*, *BY* dan *CZ* Konkuren di satu titik, yaitu di titik K. ■



Gambar 4. Ketiga garis *AX*, *BY* dan *CZ* berpotongan di satu titik

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 146 - 151
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

SIMPULAN

Pengembangan teorema *kosnita* dengan memodifikasi konstruksi *Orthocenter–Circumcenter* akan menghasilkan kekonkurenan pada satu titik. Penulis menyarankan agar modifikasi teorema kosnita ini di kontruksi dengan garis-garis istimewa pada segitiga yang lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

A. Wardiyah, Mashadi and S. Gemawati. 2016. Relationship Of Lemoine Circle With A Symmedian Point. *Journal of Mathematical Sciences*. 17(2): 23-33

C. Valentika, Mashadi and S. Gemawati. 2017. Development of Napoleon's Theorem on the Rectangles inCase of Inside Direction. *International J. of Theoretical and Applied Math*. 3(2): 54-57

D. Grinberg. 2003. On the Kosnita Point and the Reflection Triangle. *Forum Geometricorum*. 3: 105-111.

H. Herlinawati, Mashadi, S. Gemawati and Hasriati. 2015. Semiexcircle of quadrilateral. *Journal. Math*. 15 (1 & 2): 1-13

I. Patrascu. 2010. O Generalizare a teoremei lui Cosnita. *Smarandhace Nations Journal*. 1: 102-103

Mashadi. 2015.a. *Geometri* (Edisi kedua), Pekanbaru: UR Press.

Mashadi. 2015.b. *Geometri Lanjut*, Pekanbaru: UR Press.

Mashadi. 2016.c. *Pengajaran Matematika*. Pekanbaru: UR Press.

P. Januarti, Mashadi, S. Gemawati and Hasriati. 2015. Some result on excircle of quadrilateral. *J. Math*. 14(1 & 2): 41-56

Zukrianto, Mashadi, S. Gemawati. 2016. A Nonconvex Quadrilateral And Semi Gergonne Points On It: Some Results and Analysis. *Fundamental J.of Math And Mathematical Sciences*. 6 (2): 111-124