Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

PENGEMBANGAN TEOREMA VAN AUBEL PADA SEGIENAM

Mulyadi[1], Mashadi[2], Habibis Saleh[3], Hasriati[4]
[1]Pendidikan Matematika PPs Universitas Riau
[2,3,4]Universitas Riau
e-mail: mulyadi.koto10@gmail.com

Abstract

In general Van Aubel's Theorem in the construction of any quadrilateral. In this paper are discussed the development of the Van Aubel's Theorem on the hexagon. If connected to two point on a corner of the hexagon by passing one vertex in the angle between two pointon the hexagon, so as to form a triangle. Furthermore if on each side of the triangle and the square was built hexagon, then the line from the center point on a hexagon square center point on the triangle facing each other are connected, will be proved there are three pairs of lines of equal length and intersect perpendicular. Van Aubel's Theorem proving on this hexagon approach proved by using congruence and similarity.

Keywords: Van Aubel's theorem, similarity, congruence

Abstrak

Secara umum Teorema Van Aubel dikontruksi dari segiempat sebarang. Dalam tulisan ini dibahas Pengembangan Teorema Van Aubel pada segienam. Jika dihubungkan dua titik sudut pada segienam dengan melewatkan satu titik sudut diantara dua titik sudut tersebut pada segienam sedemikian hingga terbentuk segitiga. Selanjutnya jika pada setiap sisi segitiga dan segienam dibangun persegi, maka garis dari titik pusat persegi pada segienam dengan titik pusat persegi pada segitiga yang saling berhadapan dihubungkan, akan dibuktikan terdapat tiga pasang garis yang sama panjang dan berpotongan tegak lurus. Pembuktian Teorema Van Aubel pada segienam ini dibuktikan dengan menggunakan pendekatan kekongruenan dan kesebangunan.

Kata kunci: Teorema Van Aubel, kesebangunan, kekongruenan

Di bidang geometri banyak yang sudah membahas Teorema-teorema pada segiempat, seperti Teorema Ptolemy, Teorema Butter-fly, dan masih banyak teorema lainnya. Satu dari sekian banyaknya teorema dalam bidang geometri yang membahas tentang segiempat yaitu Teorema Van Aubel. Teorema Van Aubel ditemukan oleh H. Van Aubel (1830-1906) pada tahun 1878 (Nishiyama, 2011).

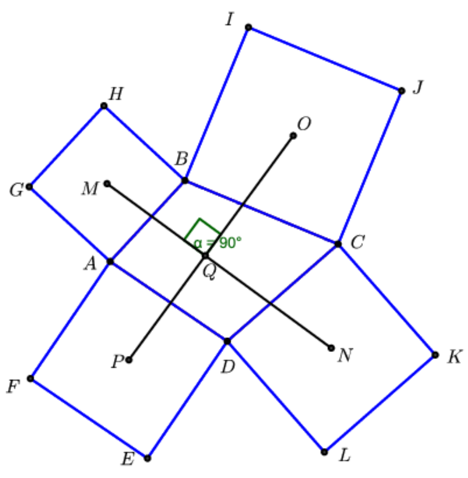
Teorema Van Aubel dikontruksi dari segiempat sebarang kemudian pada setiap sisi segiempat sebarang dibangun persegi, titik-titik potong diagonal persegi yang ber-lawanan dihubungkan sehingga terbentuk dua ruas garis sama panjang dan berpotongan tegak lurus.

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Seperti yang terlihat pada Gambar 1, garis *MN* dan *OP* sama panjang dan berpotongan tegak lurus. Beberapa pengembangan Teorema Van Aubel pada segiempat antara lain (Krisna, 2016; Villers, 1998; Villers, 2000; Glaister, 2015; Nishayama, 2011).

Pada penelitian ini Teorema Van Aubel dibuktikan dengan menggunakan konsep-konsep yang dipahami oleh siswa tingkat SMP dan SMA yaitu konsep kesebangunan dan kekongruenan. Ide pembuktian kekongruenan dan kesebangunan banyak dibahas dalam (Wardiah, Mashadi, Gemawati, 2016; Valentika, Mashadi, Gemawati, 2016; Mashadi, Valentika, Gemawati, 2016; Mashadi, 2015; Mashadi, 2015; Mashadi, 2016). Berdasarkan Teorema Van Aubel yang dibentuk dari segiempat sebarang yaitu menemukan dua ruas garis yang sama panjang dan berpotongan tegak lurus maka penulis tertarik membahas Teorema Van Aubel pada segienam sebarang.



Gambar 1. Teorema Van Aubel pada segiempat

METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu dengan menggunakan metode eksperimen dengan aplikasi Geogebra. Pembuktian Teorema Van Aubel pada segienam dalam artikel ini yaitu dengan menggunakan pendekatan kesebangunan dan kekongruenan. Langkah-langkah untuk pengembangan teorema van aubel pada segienam, sebagai berikut:

1. Diberikan sebuah segienam sebarang, setiap sisi segienam dibangun persegi
2. Dihubungkan dua titik pada segienam dengan melewatkan satu titik diantara dua titik tersebut sedemikian hingga terbentuk segitiga. Setiap sisi segitiga dibangun persegi.
3. Garis dari titik potong diagonal persegi pada segienam dengan titik potong diagonal persegi pada segitiga yang saling berhadapan dihubungkan, terdapat tiga pasang ruas garis yang sama panjang dan berpotongan tegak lurus
4. Untuk membuktikan ruas garis yang sama panjang dan berpotongan tegak lurus digunakan konsep kesebangunan dan kekongruenan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema Van Aubel umumnya berkaitan dengan segiempat. Pada setiap sisi segiempat sebarang dibangun persegi, kemudian titik-titik potong diagonal persegi yang saling berhadapan dihubungkan maka terdapat dua ruas garis sama

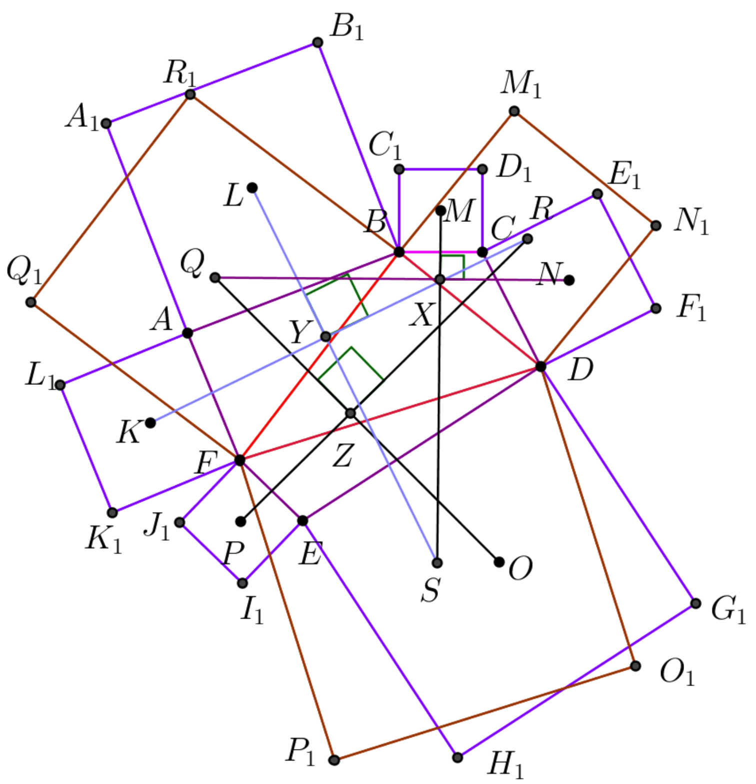
Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

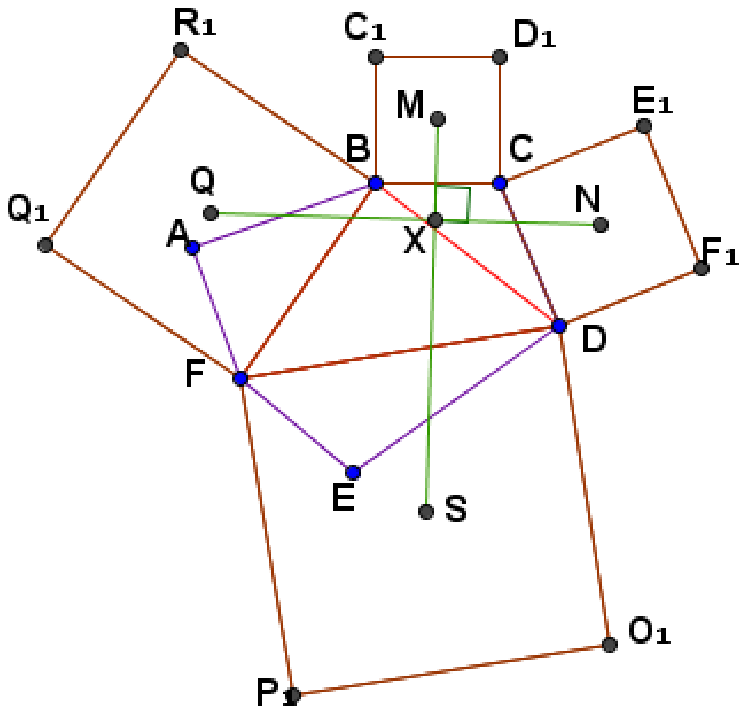
panjang dan berpotongan tegak lurus. Berdasarkan konsep Teorema Van Aubel pada segiempat, begitu juga untuk Teorema Van Aubel pada segienam, dibangun persegi pada setiap sisinya dengan masing-masing memiliki titik potong diagonal. Berikut diberikan Teorema Van Aubel pada segienam.

Teorema 1. Diberikan segienam sebarang *ABCDEF*. Pada setiap sisi segienam dibangun persegi ABB_1A_1, BCD_1C_1, dan CDF_1E_1, DEH_1G_1, EFJ_1I_1, dan AFK_1L_1, dengan masing-masing memiliki titik potong diagonal. Jika dihubungkan dua titik sudut segienam dengan melewatkan satu titik sudut diantara dua titik sudut tersebut sehingga terbentuk segitiga *BDF*. Pada setiap sisi segitiga *BDF* dibangun persegi BDN_1M_1, DFP_1O_1, dan BFQ_1R_1, dengan masing-masing memiliki titik potong diagonal. Jika setiap titik potong diagonal persegi pada segienam dengan titik potong diagonal persegi pada segitiga yang saling berhadapan dihubungkan, maka terdapat tiga pasang ruas garis yang sama panjang dan berpotongan tegak lurus (Gambar 2).

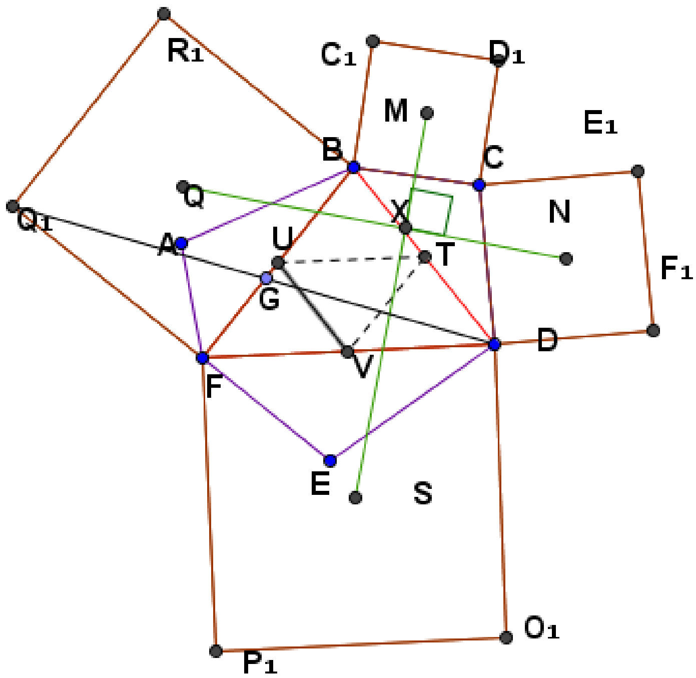
Bukti: Akan ditunjukkan $MS = QN$ dan $MS \perp QN$, LS = KR dan $LS \perp KR$, serta $PR = OQ$ dan PR $\perp OQ$ dengan pendekatan kekongruenan dan kesebangunan. Selanjutnya akan dipartisi Gambar 2 supaya lebih mudah membuktikan $MS = QN$ dan $MS \perp QN$, ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 2. Teorema Van Aubel pada segienam

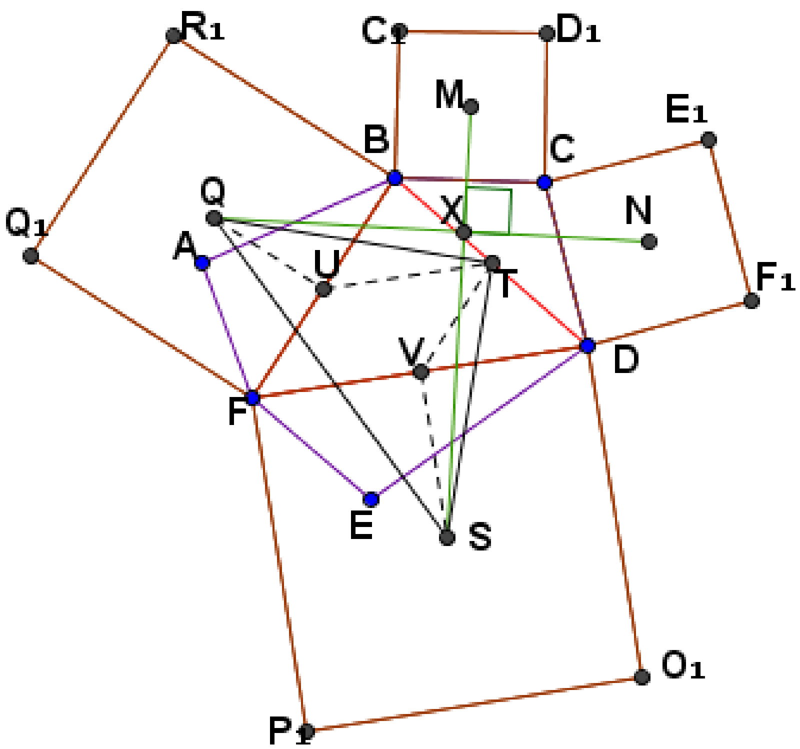


Gambar 3. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi



Gambar 4. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



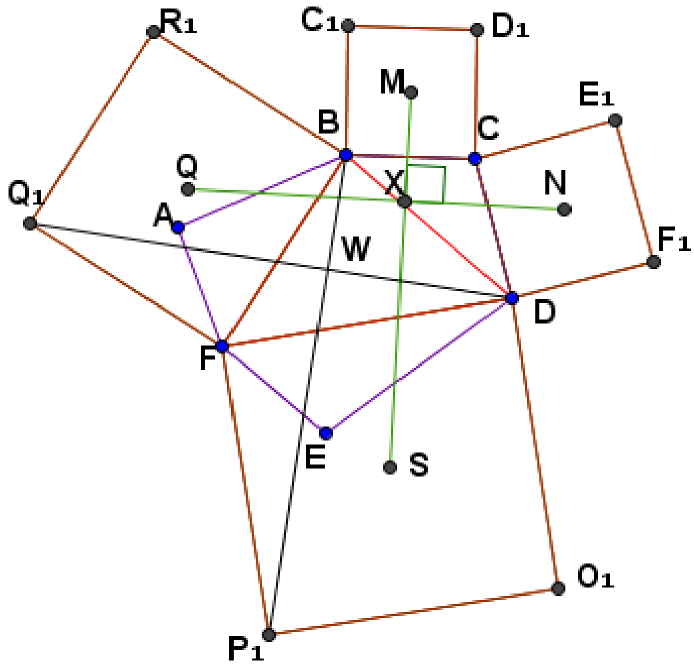
Gambar 5. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi

Misalkan T adalah titik tengah garis *BD*, U titik tengah BF dan V titik tengah FD. Pada Gambar 4, Perhatikan ΔBFD dan ΔBUT, $\frac{BU}{BF}=\frac{BT}{BD}=\frac{1}{2}$ dan $\angle FBD=\angle UBT$ sehingga $\Delta BFD \sim \Delta BUT$, jika $\frac{BU}{BF}=\frac{BT}{BD}$ maka $UT // FD$. Dengan cara yang sama, perhatikan ΔBDF dan ΔTDV, maka diperoleh $TV // BF$. Pandang segiempat FUTV, dibuat diagonal VU sehingga terbentuk ΔFVU dan ΔTUV, karena FV // UT dan FU // VT, $\angle FVU = \angle TUV$ (dalam berseberangan), $UV = VU$, $\angle FUV = \angle TVU$ (dalam berseberangan) maka $\Delta FVU \cong \Delta TUV$ hal ini menyebabkan $FU = TV$ dan $FV = UT$ sehingga segiempat FUTV adalah jajar genjang.

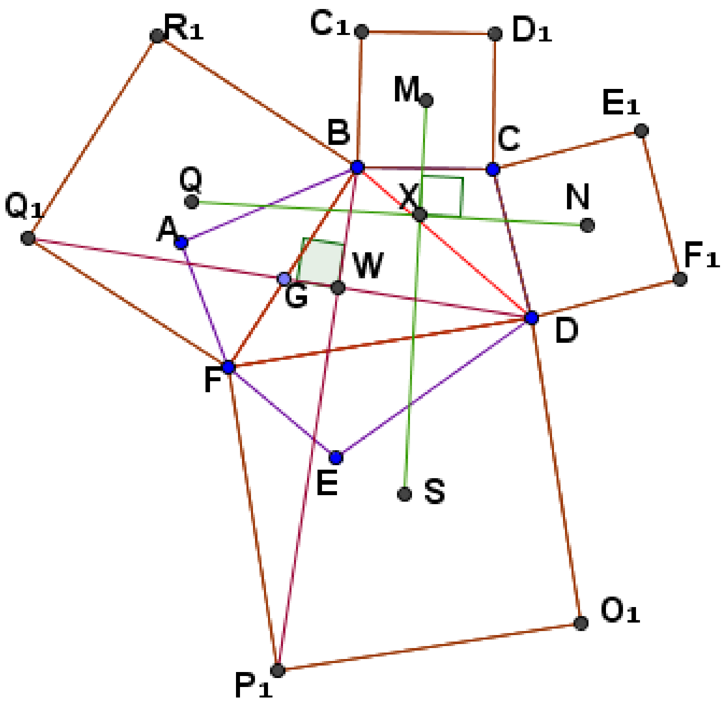
Pada Gambar 5, Perhatikan ΔQTU dan ΔSTV, QU = TV (sisi), $\angle QUT = \angle SVT$ (sudut), UT = SV (sisi), maka $\Delta QTU \cong \Delta STV$ sehingga QT = ST, hal ini menyebabkan ΔQTS sama kaki.

Diberikan garis DQ_1 dan garis BP_1 Terbentuk ΔDFQ_1 dan ΔBFP_1 seperti pada Gambar 6. Karena $Q_1F = BF$ (sisi), $\angle DFQ_1 = \angle BFP_1$ (sudut), $DF = FP_1$ (sisi), maka $\Delta DFQ_1 \cong \Delta BFP_1$ sehingga $\angle DQ_1F = \angle FBP_1$.

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 6. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi

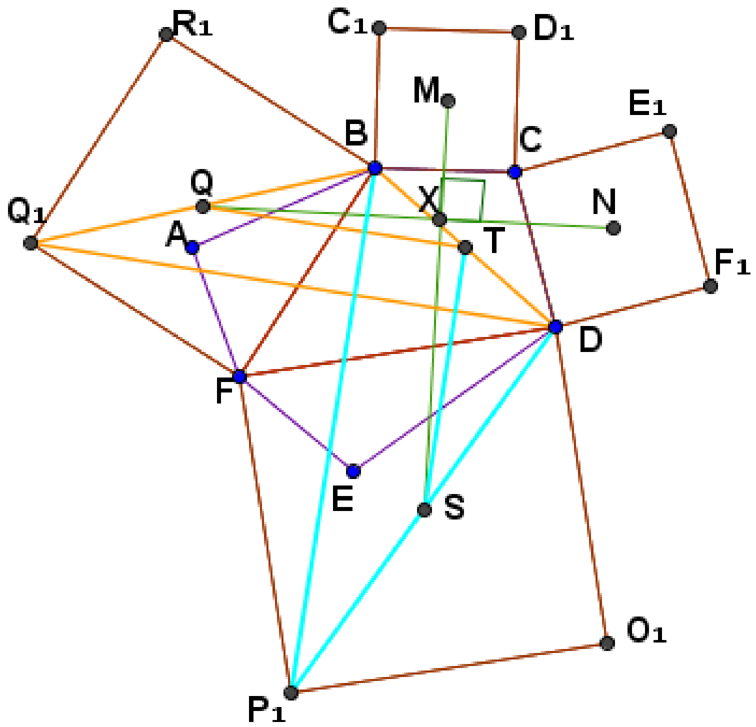


Gambar 7. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi

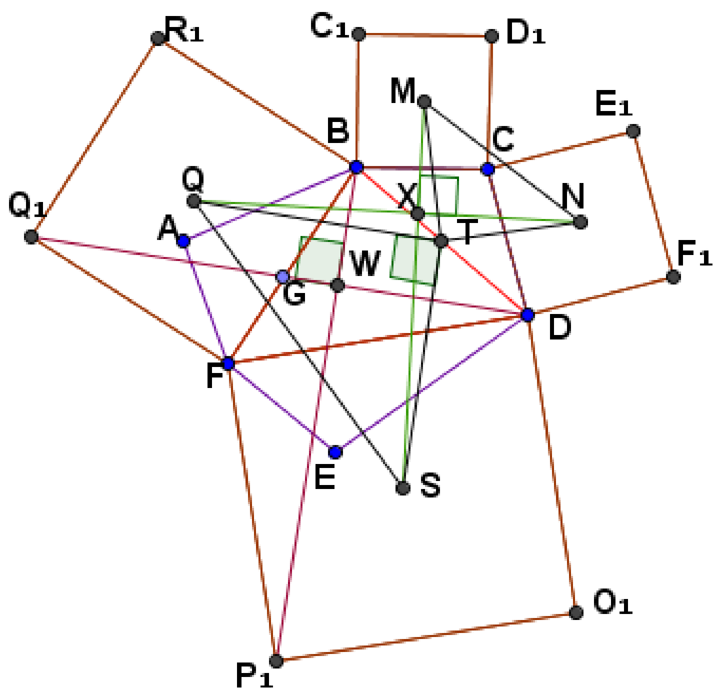
Pandang ΔQ_1FG dan ($\Delta DFQ_1 \cong \Delta BFP_1$), ΔBWG, $\angle FQ_1G = \angle WBG$

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

$\angle FGQ_1 = \angle WGB$ (bertolak belakang) sehingga sudut ketiga $\angle Q_1FG = \angle BWG = 90^\circ$.



Gambar 8. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi



Gambar 9. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi

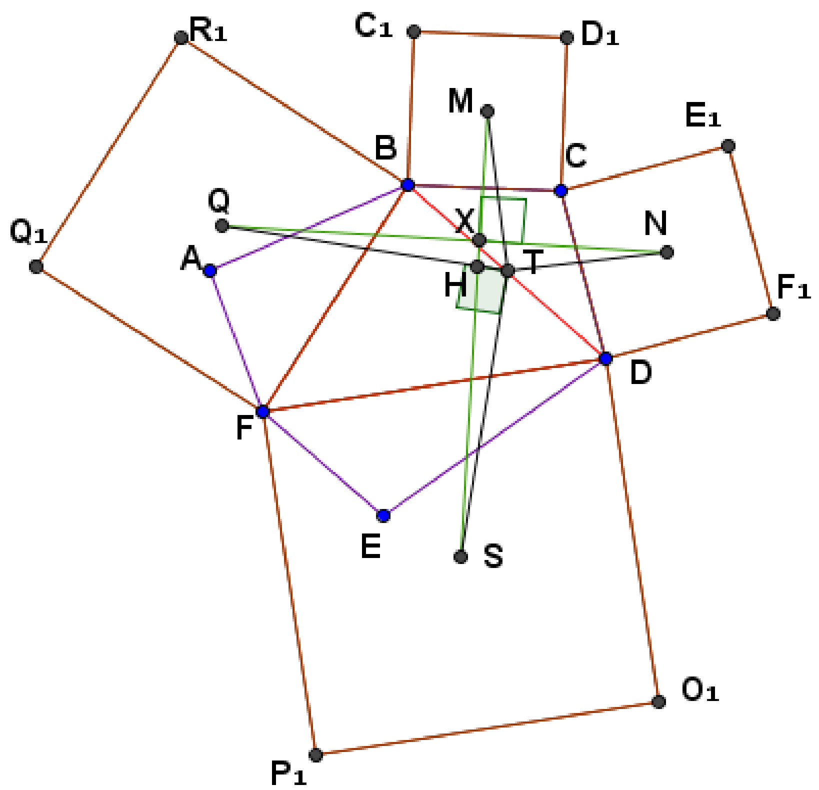
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Pada Gambar 8, Perhatikan $\Delta Q_1\text{BD}$ dan ΔQBT, $\frac{BQ}{BQ_1}=\frac{BT}{BD}=\frac{1}{2}$ dan $\angle Q_1BD=\angle QBT$ sehingga $\Delta Q_1\text{BD}\sim\Delta QBT$, jika $\frac{BQ}{BQ_1}=\frac{BT}{BD}$ maka $QT\,//\,Q_1D$. Dengan cara yang sama, perhatikan ΔBDP_1 dan ΔTDS, maka diperoleh $TS\,//\,P_1B$.

Karena $Q_1D\,//\,QT$ dan $P_1B\,//\,ST$ menyebabkan $\angle BWG=\angle STQ=90^\circ$ sehingga ΔQTS adalah segitiga sama kaki siku-siku. Dengan cara yang sama berlaku untuk ΔMTN, sehingga ΔMTN adalah segitiga sama kaki siku-siku seperti pada Gambar 9.

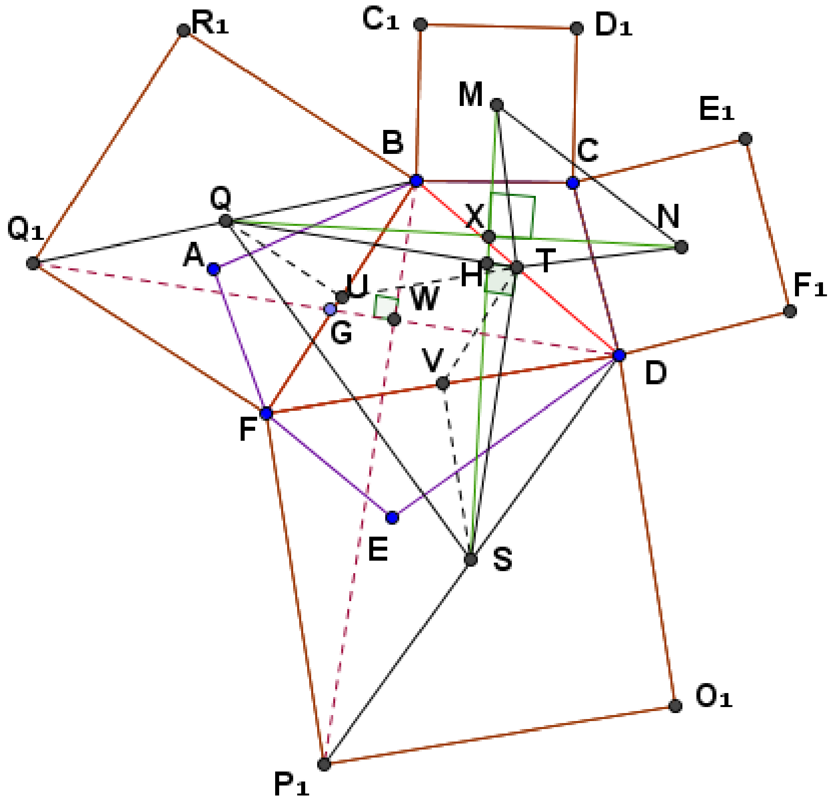
Selanjutnya pandang ΔMTS dan ΔQTN, karena $MT=TN$ (sisi), $\angle MTS=\angle QTN$ (sudut). $TS=QT$ (sisi) maka $\Delta MTS\cong\Delta QTN$ sehingga $MS=NQ$. Dari ΔQXH dan ΔSTH, $\angle XQH=\angle HST$ ($\Delta MTS\cong\Delta QTN$), $\angle QHX=\angle SHT$ (bertolak belakang) sehingga sudut ketiga $\angle HTS=\angle HXQ=90^\circ$

Dengan cara yang sama akan diperoleh LS = *KR* dan *LS* ⊥ *KR*, serta *PR* = *OQ* dan PR ⊥ *OQ*.



Gambar 10. Teorema Van Aubel pada segienam yang telah dipartisi

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp



Gambar 11. Bukti Teorema Van Aubel pada segienam

SIMPULAN

Secara umum Teorema Van Aubel dikontruksikan dari segiempat sebarang. Pada tulisan ini pengembangan Teorema Van Aubel yang dilakukan pada segienam, sehingga ditemukan tiga pasang ruas garis sama panjang dan berpotongan tegak lurus.

DAFTAR RUJUKAN

A. Wardiah, Mashadi, S. Gemawati. 2016. Relationship Of Lemoine Circle With A Symmedian Point. *Journal of Mathematical Sciences*. 17 (2): 23 – 33.

C. Valentika, Mashadi, S. Gemawati. 2016. The Development Of Napoleon's Theorem On Quadrilateral With Congruence And Trigonometry. *Bulletin of Mathematics*. 8 (1): 97 – 108.

D. N. V. Krishna. 2016. *A new consequence of Van Aubel's Theorem*, Dapartemen t of Mathematics, 1, 1-9.

Mashadi, C. Valentika, S. Gemawati. 2017. Development of Napoleon's Theorem on the

Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp

Rectanglesin Case of Inside Direction. *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics*. 3(2): 54-57.

Mashadi. 2015. *Geometri* (edisi ke dua), Unri Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2015. *Geometri lanjut*, Unri Press, Pekanbaru.

Mashadi. 2016. *Pengajaran matematika*, UR Press, Pekanbaru.

M. D. Villiers. 2000. Generalizing Van Aubel Using Duality, *Mathematics Magazine* 73 (4): 303 – 307.

P. Glaister. 2015. *A Van Aubel Theorem revisited*, Applied Probability Trust, 33-36.

Y. Nishiyama. 2011. The beautiful Geometric theorem of Van Aubel. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 1, 71-80.

Jurnal
MATEMATICS PAEDAGOGIC
Vol I. No. 2, Maret 2017, hlm. 119 - 128
Available online at www.jurnal.una.ac.id/indeks/jmp